Chapitre : Variables aléatoires finies

1 Calculs de lois, d'espérances, de variances

Exercice 1 **Loi d'un dé truqué** –

On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotés de 1 à 6 et on note X la variable aléatoire donnée par le numéro de la face du dessus. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

1. Déterminer la loi de X, calculer son espérance.
2. On pose $Y = 1/X$. Déterminer la loi de Y, et son espérance.

Indication ▼ Correction ▼ [1253]

Exercice 2 **En plein dans le mille ! –**

Un joueur tire sur une cible de 10cm de rayon, constituée de couronnes concentriques, délimitées par des cercles de rayons 1,2, ..., 10 cm, et numérotées respectivement de 10 à 1. La probabilité d'atteindre la couronne k est proportionnelle à l'aire de cette couronne, et on suppose que le joueur atteint sa cible à chaque lancer. Soit X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe le numéro de la cible.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?

2. Le joueur gagne k euros s'il atteint la couronne numérotée k pour k compris entre 6 et 10, tandis qu'il perd 2 euros s'il atteint l'une des couronnes périphériques numérotées de 1 à 5. Le jeu est-il favorable au joueur ?

Indication ▼ Correction ▼ [2257]

Exercice 3 **Plus grand nombre tiré** –

On lance deux dés parfaitement équilibrés. On note X le plus grand des numéros obtenus. Déterminer la loi de la variable aléatoire X.

Indication ▼ Correction ▼ [2253]

Exercice 4 ★★★ **Vaches laitières** –

Les vaches laitières sont atteintes par une maladie M avec la probabilité $p = 0,15$. Pour dépister la maladie M dans une étable de n vaches, on fait procéder à une analyse de lait. Deux méthodes sont possibles :

Première méthode : On fait une analyse sur un échantillon de lait de chaque vache. Deuxième méthode : On effectue d'abord une analyse sur un échantillon de lait provenant du mélange des n vaches. Si le résultat est positif, on effectue une nouvelle analyse, cette fois pour chaque vache.

On voudrait connaître la méthode la plus économique (=celle qui nécessite en moyenne le moins d'analyse). Pour cela, on note X_n la variable aléatoire du nombre d'analyses réalisées dans la deuxième méthode. On pose $Y_n = \frac{X_n}{n}$.

1. Déterminer la loi de Y_n, et montrer que son espérance vaut : $1 + \frac{1}{n} - (0.85)^n$.
2. Etudier la fonction $f(x) = ax + \ln x$, pour $a = \ln(0,85)$. Donner la liste des entiers n tels que $f(n) > 0$.
3. Montrer que $f(n) > 0$ équivaut à $E(Y_n) < 1$. En déduire la réponse (en fonction de n) à la question posée.

Indication ▼ Correction ▼ [1255]

Exercice 5 ★★★ **Recrutement** –

Une entreprise souhaite recruter un cadre. n personnes se présentent pour le poste. Chacun d'entre eux passe à tour de rôle un test, et le premier qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est $p \in]0,1[$. On pose également $q = 1-p$. On définit la variable aléatoire X par $X = k$ si le k-ième candidat qui passe le test est engagé, et $X = n+1$ si personne n'est engagé.

1. Déterminer la loi de X.
2. En dérivant la formule donnant $\sum_{k=0}^{n} x^k$, calculer $\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ pour $x \neq 1$.
3. En déduire l'espérance de X.
4. Quelle est la valeur minimale de p pour avoir plus d'une chance sur deux de recruter l'un des candidats ?

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 6 ★★★★ **Génotype –**

On s'intéresse à une maladie génétique. Elle est portée par un gène particulier qui existe en deux formes : l'allèle A (sain), et l'allèle B (malade). Il existe donc par chaque individu trois génotypes possibles : 1 (A A), 2 (A B) et 3 (B B). Un individu est malade lorsqu'il porte le génotype (B B). Le but de l'exercice est de démontrer que la proportion de malades est constante au cours du temps. Pour cela, on s'intéresse à une population dont la proportion du génotype i, à la génération n, est noté $u_i(n)$. On rappelle que chaque enfant reçoit un des deux allèles de chacun de ses parents (et ce de façon complètement aléatoire). On suppose aussi que les procréations dans la population se font complètement aléatoirement. On fixe $n \geq 0$ et on note E le génotype d'un enfant de la $n+1$-ième génération, P et M les génotypes respectifs du père et de la mère.

1. Calculer les probabilités conditionnelles $P(E = 1|(P,M) = (i,j))$.
2. En déduire la loi de E en fonction de $u_i(n)$.
3. On pose $\theta(n) = u_1(n) + \frac{1}{2}u_2(n)$. Exprimer $u_i(n+1)$ en fonction de $\theta(n)$.
4. Démontrer que la proportion de malades ne varie plus à partir de la génération 2.

Indication ▼ Correction ▼ [1260]

2 Loi uniforme

Exercice 7 **Trouver le paramètre d'une loi uniforme connaissant son espérance** –

Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\{0,1,\dots,a\}$, où $a \in \mathbb{N}$. On suppose que $E(X) = 6$. Déterminer a.

Indication ▼ Correction ▼ [2262]

Exercice 8 **Uniformément uniforme –**

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n, l'urne numérotée k comprenant k boules numérotées de 1 à k indiscernables au toucher. On réalise l'expérience aléatoire suivante. On choisit d'abord au hasard et sans préférence une urne, puis on prélève une boule dans cette urne. On note X le numéro de l'urne choisie et on note Y le numéro de la boule tirée.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?
2. Pour $(i,k) \in \{1,\dots,n\}^2$, déterminer $P(Y=k|X=i)$.
3. Déterminer la loi de Y.
4. Quelle est l'espérance de Y ? Comment l'interprétez-vous ?

Indication ▼ Correction ▼ [1263]

Exercice 9 ★★★ **Urne de Polya –**

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule noire. On repète n fois l'expérience suivante : on tire une boule de l'urne, on la remet et on ajoute une boule de la même couleur. Soit $k \in \{1,\dots,n\}$.

1. Quel est le nombre de boules dans l'urne après la k-ième expérience ?

2. On note N_k le nombre de boules blanches dans l'urne après la k-ième expérience. Montrer que N_k suit une loi uniforme sur $\{1,\dots,k+1\}$.

Indication ▼ Correction ▼ [3141]

Exercice 10 **Minimum et maximum de deux dés** –

On lance deux dés équilibrés, on note U_1 et U_2 les variables aléatoires correspondant aux résultats obtenus. On appelle $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

1. Donner la loi de X. En déduire $E(X)$.
2. Exprimer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire $E(Y)$.
3. Exprimer XY en fonction de U_1 et U_2. En déduire $\mathrm{Cov}(X, Y)$. X et Y sont-elles indépendantes ?

Indication ▼ Correction ▼ [1258]

Exercice 11 **Deux variables aléatoires suivant une loi uniforme –**

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$.

1. Déterminer $P(X=Y)$.
2. Déterminer $P(X \geq Y)$.
3. Déterminer la loi de $X+Y$.

Indication ▼ Correction ▼ [1815]

Exercice 12 **Minimum de variables aléatoires uniformes –**

Soit $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini, indépendantes, et suivant une loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$. On note $M=\min(X_1,\dots,X_n)$.

1. Pour $k\in\{1,\dots,n\}$, déterminer $P(M\geq k)$.
2. En déduire la loi de M.
3. Soit A l'événement : "il existe $i\in\{1,\dots,n\}$ tel que $X_i=1$". Démontrer que $P(A)\geq 1-\frac{1}{e}$.

Indication ▼ Correction ▼ [3147]

3 Loi binomiale

Exercice 13 **Avion –**

A et B sont deux avions ayant respectivement 4 et 2 moteurs. Les moteurs sont supposés indépendants les uns des autres, et ils ont une probabilité p de tomber en panne. Chaque avion arrive à destination si strictement moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne. Quel avion choisissez-vous ? (on discutera en fonction de p).

Indication ▼ Correction ▼ [1257]

Exercice 14 **Le restaurateur** –

Un restaurateur accueille chaque soir 70 clients. Il sait qu'en moyenne, deux clients sur cinq prennent une crème brûlée. Il pense que s'il prépare 30 crèmes brûlées, dans plus de 70% des cas, la demande sera satisfaite.

1. A-t-il raison ?

2. Combien de crèmes brûlées doit-il fabriquer au minimum pour que la demande soit satisfaite dans au moins 90% des cas.

Indication ▼ Correction ▼ [2569]

Exercice 15 **Lancer de pièces** –

On lance n fois une pièce parfaitement équilibrée. Quelle est la probabilité d'obtenir strictement plus de piles que de faces.

Indication ▼ Correction ▼ [1262]

Exercice 16 **Code de la route ! –**

L'examen du code de la route se compose de 40 questions. Pour chaque question, on a le choix entre 4 réponses possibles. Une seule de ces réponses est correcte. Un candidat se présente à l'examen. Il arrive qu'il connaisse la réponse à certaines questions. Il répond alors à coup sûr. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard entre les 4 réponses proposées. On suppose toutes les questions indépendantes et que pour chacune de ces questions, la probabilité que le candidat connaisse la vraie réponse est p. On note, pour $1 \leq i \leq 40$, A_i l'événement : "le candidat donne la bonne réponse à la i-ème question". On note S la variable aléatoire égale au nombre total de bonnes réponses.

1. Calculer $P(A_i)$.
2. Quelle est la loi de S (justifier !) ?
3. A quelle condition sur p le candidat donnera en moyenne au moins 36 bonnes réponses ?

Indication ▼ Correction ▼ [2160]

Exercice 17 **Méthode du maximum de vraisemblance** –

Un étang contient des brochets et des truites. On note p la proportion de truites dans l'étang. On souhaite évaluer p. On prélève 20 poissons au hasard. On suppose que le nombre de poissons est suffisamment grand pour que ce prélèvement s'apparente à 20 tirages indépendants avec remise. On note X le nombre de truites obtenues.

1. Quelle est la loi de X ?

2. Le prélèvement a donné 8 truites. Pour quelle valeur de p la quantité $P(X=8)$ est-elle maximale ?

Indication ▼ Correction ▼ [2254]

Exercice 18 ★★★★ **QCM –**

Un examen consiste en un QCM de 15 questions. Pour chaque question, 3 réponses sont possibles. Les étudiants répondent à chaque question indépendamment. L'enseignant estime que les étudiants ayant préparé l'examen sont 70% et répondent à une question correctement avec probabilité 0,8. Les autres étudiants choisissent les réponses au hasard. Il faut au moins 8 bonnes réponses pour réussir l'examen.

1. Quelle est la probabilité qu'un étudiant, choisi au hasard, réussisse l'examen ?
2. Si un étudiant échoue, quelle est la probabilité qu'il ait préparé l'examen ?

Indication ▼ Correction ▼ [1259]

Exercice 19 **Maximum d'une loi binomiale** –

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Pour quelle(s) valeur(s) de k la probabilité $p_k = P(X = k)$ est maximale ?

Indication ▼ Correction ▼ [1261]

Exercice 20 ★★★ **La grenouille** –

Une grenouille monte les marches d'un escalier (supposé infini) en partant du sol et en sautant ou bien une seule marche, avec probabilité p ; ou bien deux marches, avec la probabilité $1-p$.

On suppose que les sauts sont indépendants les uns des autres.

1. Dans cette question, on observe n sauts de la grenouille, et on note X_n le nombre de fois où la grenouille a sauté une marche, et Y_n le nombre de marches franchies. Quelle est la loi de X_n ? Exprimer Y_n en fonction de X_n. En déduire l'espérance et la variance de Y_n.

2. Pour $k \geq 1$, on note p_k la probabilité que la grenouille passe par la marche k. Que vaut p_1 ? Que vaut p_2 ? Établir une formule de récurrence liant p_k et p_{k-1}. En déduire la valeur de p_k pour $k \geq 1$.

3. On note désormais Z_n le nombre de sauts nécessaires pour atteindre ou dépasser la n-ième marche. Écrire un algorithme qui simule la variable aléatoire Z_n.

Indication ▼ Correction ▼ [2255]

4 Exercices théoriques

Exercice 21 **Une autre expression de l'espérance** –

Soit X une variable aléatoire prenant ses valeurs dans $\{0,1,\dots,N\}$. Démontrer que

$$E(X)=\sum_{n=0}^{N-1}P(X>n).$$

Indication ▼ Correction ▼ [1265]

Exercice 22 **Au carré** –

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé fini. Démontrer que $E(X)^2 \leq E(X^2)$.

Indication ▼ Correction ▼ [1266]

Exercice 23 **Maximiser l'espérance –**

Soit $n \geq 2$. On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2, définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{B}, P)$, et suivant la loi uniforme discrète sur $\{1, 2, \ldots, n\}$. On considère a un entier de $\{1, 2, \ldots, n\}$, et Y la variable aléatoire définie par :

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \begin{cases} X_1(\omega) & \text{si } X_2(\omega) \leq a \\ X_2(\omega) & \text{si } X_2(\omega) > a. \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de Y (vérifier que l'on obtient bien une loi de probabilité).
2. Calculer l'espérance de Y et la comparer à l'espérance de X_1.
3. Pour quelles valeurs de a cette espérance est-elle maximale ?

Indication ▼ Correction ▼ [1267]

Exercice 24 **Entropie d'une variable aléatoire –**

Soit X une variable aléatoire discrète finie prenant la valeur x_i avec probabilité p_i, pour $i = 1,\dots,n$. On définit l'entropie de X par :

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln(p_i)$$

avec la convention $x\ln x = 0$ si $x = 0$ (ce qui correspond au prolongement par continuité en 0 de la fonction $x \mapsto x\ln x$).

1. Démontrer que $H(X) \geq 0$.

2. Démontrer que $H(X) = 0$ si et seulement si X est presque sûrement constante, c'est-à-dire s'il existe $i \in \{1,\dots,n\}$ tel que $p_i = 1$.

3. Vérifier que, pour tout $k = 1,\dots,n$, on a

$$(-np_k)\ln(np_k) \leq 1 - np_k$$

avec égalité si et seulement si $np_k = 1$.

4. En déduire que $H(X) \leq \ln n$.

5. Démontrer que $H(X) = \ln n$ si et seulement si X est équidistribuée, ie si $p_i = 1/n$ pour tout $i = 1,\dots,n$.

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 25 **Fonction génératrice –**

Pour X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0,\dots,n\}$, on appelle fonction génératrice la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$G_X(x)=\sum_{k=0}^{n} p_k x^k$$

où $p_k = P(X=k)$.

1. Déterminer la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p ; une loi binomiale de paramètres n et p.

2. Démontrer que deux variables aléatoires discrètes finies X et Y ont même loi si et seulement si $G_X = G_Y$.

3. Montrer que $E(X)=G'_X(1)$ et $V(X)=G''_X(1)+G'_X(1)-\left(G'_X(1)\right)^2$. Retrouver l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

4. Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes finies indépendantes, alors $G_{X+Y}=G_X G_Y$. Retrouver alors la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

5. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois binomiales respectives $\mathscr{B}(n,p)$ et $\mathscr{B}(m,p)$. Quelle est la loi de $Z=X+Y$?

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 26 ★★★★★ **Somme de variables aléatoires ayant une répartition uniforme** –

1. Soient a,b,c,d,λ 5 réels strictement positifs. Montrer qu'il est impossible que

$$\begin{cases} ab &= \lambda \\ cd &= \lambda \\ ac+bd &\leq \lambda \end{cases}$$

2. Soit $n \geq 1$. Existe-t-il deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{0,\dots,n\}$ dont la somme suit une loi uniforme sur $\{0,\dots,2n\}$?

Indication ▼ Correction ▼ [1269]

5 Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Exercice 27 **Lancer de dé** –

On jette 3600 fois un dé équilibré à 6 faces. Minorer la probabilité que le nombre d'apparitions du numéro 1 soit compris entre 480 et 720.

Indication ▼ Correction ▼ [2026]

Exercice 28 **Loi faible pour des sommes de Bernoulli qui n'ont pas la même loi –**

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé fini Ω. On suppose que, pour chaque $n \geq 1$, X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre p_i. On suppose en outre que les variables aléatoires sont deux à deux indépendantes. On pose

$$S_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \text{ et } m_n = \frac{p_1 + \cdots + p_n}{n}.$$

Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $P(|S_n - m_n| \geq \varepsilon) \to 0$.

Indication ▼ Correction ▼

Exercice 29 **Pièces défectueuses** –

Une usine fabrique des pièces dont une proportion inconnue p est défectueuse, et on souhaite trouver une valeur approchée de p. On effectue un prélèvement de n pièces. On suppose que le prélèvement se fait sur une population très grande, et donc qu'il peut s'apparenter à une suite de n tirages indépendants avec remise. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de pièces défectueuses et on souhaite quantifier le fait que X_n/n approche p.

1. Quelle est la loi de X_n ? Sa moyenne ? Sa variance ?

2. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$.

3. En déduire une condition sur n pour que X_n/n soit une valeur approchée de p à 10^{-2} près avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

Indication ▼ Correction ▼ [2040]

Exercice 30 **Une variante de l'inégalité de Markov –**

Soit X une variable aléatoire réelle finie à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction croissante. Démontrer que

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(f(X))}{f(a)}.$$

Indication ▼ Correction ▼ [3145]

Exercice 31 **Surréservation et inégalité de Tchebychev –**

Une compagnie aérienne exploite un avion Paris-Montréal d'une capacité de 150 places. Pour ce vol, une analyse statistique a montré qu'un passager ayant réservé son billet se présentait à l'embarquement avec une probabilité de $p = 0{,}75$. La compagnie souhaite optimiser le remplissage de l'avion et souhaite vendre n billets, avec $n > 150$, mais en limitant le risque que plus de 150 personnes se rendent à l'embarquement à moins de 5%. On supposera dans la suite que $np < 150$. On définit la variable aléatoire S_n comme le nombre de personnes, parmi les n ayant réservé un billet, se présentant à l'embarquement.

1. Quelle est la loi de S_n ?
2. En remarquant que $(S_n \geq 150) \subset (|S_n - np| \geq 150 - np)$, démontrer que

$$P(S_n \geq 150) \leq \frac{np(1-p)}{(150-np)^2}.$$

3. Résoudre sur $]0, 150[$ l'inéquation $\frac{x(1-p)}{(150-x)^2} \leq 0{,}05$.
4. Combien la compagnie peut-elle vendre de billets tout en s'assurant que la probabilité que plus de 150 clients se présentent à l'embarquement est inférieure ou égale à 5% ?

Indication ▼ Correction ▼ [3089]

Exercice 32 ★★★ **Méthode de Monte-Carlo –**

On munit le plan d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. On choisit au hasard, et uniformément, un point M dans le carré unité, c'est-à-dire le carré dont les sommets sont les points de coordonnées $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ et $(1,1)$. On note X la variable aléatoire qui vaut 1 si le point est dans le quart de disque unité, et 0 sinon.

1. Justifier que X suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre p.

2. Écrire une fonction Python `simulX()` qui simule cette variable aléatoire X.

3. On répète n fois et de façon indépendante cette expérience et on note X_n le résultat obtenu lors de la n-ième expérience. On pose S_n la variable aléatoire $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Quelle est la loi de S_n ?

4. On pose $P_n = \frac{4S_n}{n}$ et on considère $\varepsilon > 0$. Justifier que

$$P(|P_n - \pi| \geq \varepsilon) \leq \frac{\pi(4-\pi)}{\varepsilon^2 n}.$$

5. Combien suffit-il de tirer de points pour que P_n constitue une approximation de π à 10^{-2} près, avec une probabilité supérieure ou égale à 95% ?

6. Écrire une fonction Python `approxpi()` utilisant la fonction `simulX()` qui renvoie une approximation de π à 10^{-2} près, avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

Indication ▼ Correction ▼ [3090]

Exercice 33 ★★★★ **Inégalité de Cantelli –**

Soit X une variable aléatoire réelle et $a > 0$.

1. Démontrer que, pour tout $t \geq 0$, $P\big(X - E(X) \geq a\big) \leq \frac{t^2 + V(X)}{(a+t)^2}$.

2. En déduire que $P\big(X - E(X) \geq a\big) \leq \frac{V(X)}{V(X)+a^2}$.

3. Démontrer l'inégalité de Cantelli : $P\big(|X - E(X)| \geq a\big) \leq \frac{2V(X)}{V(X)+a^2}$. Comparer avec l'inégalité de Tchebychev.

Indication ▼ Correction ▼ [3144]

6 Vecteurs aléatoires discrets finis

Exercice 34 **Tirage simultané dans une urne** –

On tire simultanément deux boules dans une urne contenant 4 boules indiscernables au toucher et numérotées de 1 à 4. On note U le numéro de la plus petite boule, et V le numéro de la plus grande boule. Déterminer la loi conjointe de (U,V), puis les lois de U et de V.

Indication ▼ Correction ▼ [3148]

Exercice 35 **Couple de variables aléatoires uniformes** –

Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini et soit $X : \Omega \to E$ et $Y : \Omega \to F$ deux variables aléatoires. Démontrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

$(X,Y) \sim \mathscr{U}(E \times F)$; $X \sim \mathscr{U}(E)$, $Y \sim \mathscr{U}(F)$ et X et Y sont indépendantes.

Indication ▼ Correction ▼ [3096]

Exercice 36 **Loi marginale** –

On dispose de n boites numérotées de 1 à n. La boite k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit au hasard de façon équiprobable une boite, puis une boule dans cette boite. On note X le numéro de la boite et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X,Y).
2. En déduire la loi de Y.
3. Calculer l'espérance de Y.

Indication ▼ Correction ▼ [1273]

Exercice 37 **Loi jointe uniforme –**

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires suivant une loi uniforme sur $\{0,\dots,n\}^2$.

1. Déterminer la loi de X, la loi de Y, la loi de $X+Y$.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?

Indication ▼ Correction ▼ [1277]

Indication pour l'exercice 1 ▲

1. Utiliser que $\sum_{k=1}^{6} P(X=k)=1$, pour déterminer la loi de X.
2. $P(Y=1/k)=P(X=k)$.

Indication pour l'exercice 2 ▲

1. Calculer l'aire de chaque couronne.
2. Introduire la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur, puis calculer l'espérance de cette variable aléatoire.

Indication pour l'exercice 3 ▲

Définir un univers adapté à l'expérience aléatoire, et écrire les événements $X=k$ en fonction des événements élémentaires.

Indication pour l'exercice 4 ▲

1. Y_n ne prend que deux valeurs. Calculer la probabilité de chacune.
2. Montrer que f admet un maximum en $-1/a$.
3. Pour la première méthode, on fait constamment n prélèvements. Donc, il faut choisir la deuxième méthode si, et seulement si, $E(Y_n)<1$.

Indication pour l'exercice 5 ▲

1. Utiliser la formule des probabilités composées.
2. Utiliser la formule de la somme d'une série géométrique.
3. Combiner les questions précédentes.
4. On recrute un candidat si l'événement $X \leq n$ est réalisé.

Indication pour l'exercice 6 ▲

1. Interpréter les données de l'énoncé sur la transmission des gènes.
2. $P(E=1)$ s'obtient par la formule des probabilités totales, et $P(E=3)$ est facile à calculer par symétrie.
3. Utiliser le résultat de la question précédente, et le fait que $u_1(n)+u_2(n)+u_3(n)=1$.
4.

Indication pour l'exercice 7 ▲

Calculer $E(X)$ en fonction de a.

Indication pour l'exercice 8 ▲

Calculer $P(Y=k)$ en utilisant la formule des probabilités totales. Pour calculer l'espérance, on applique la définition et on permute les sommes.

Indication pour l'exercice 9 ▲

1.
2. Procéder par récurrence sur k.

Indication pour l'exercice 10 ▲

1. Écrire l'événement $X=i$ comme réunion de trois événements disjoints.
2. (X,Y) est une permutation de (U_1,U_2).
3.

Indication pour l'exercice 11 ▲

1

1. $X = Y \iff \exists k \in \{1,\dots,n\},\ X = k$ et $Y = k$.
2. Utiliser $P(X > Y)$.
3. $X + Y = k \iff \exists i \in \{1,\dots,k-1\},\ X = i$ et $Y = k - i$.

Indication pour l'exercice 12 ▲

1. On a $M \geq k$ si et seulement si, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $X_i \geq k$. Utiliser ensuite l'indépendance.
2. $(M \geq k) = (M = k) \cup (M \geq k+1)$.
3. $A = (M = 1)$.

Indication pour l'exercice 13 ▲

Noter X la variable aléatoire du nombre de moteurs de A qui tombent en panne, et Y la variable aléatoire du nombre de moteurs de B qui tombent en panne. On arrive à destination si $X = 0, 1$ ou si $Y = 0$.

Indication pour l'exercice 14 ▲

Introduire la variable aléatoire égale au nombre de crèmes brûlées commandées chaque soir.

Indication pour l'exercice 15 ▲

Utiliser la symétrie entre les piles et les faces ! On pourra distinguer les cas où n est pair et n est impair.

Indication pour l'exercice 16 ▲

1. Utiliser la formule des probabilités totales.
2. Reconnaitre une loi classique.
3. C'est une question d'espérance...

Indication pour l'exercice 17 ▲

1.
2. Etudier la fonction $p \mapsto P(X = 8)$.

Indication pour l'exercice 18 ▲

1. Noter A l'événement "l'étudiant a préparé l'examen", R l'événement "l'étudiant a réussi l'examen" et X la variable aléatoire du nombre de questions ayant eu une bonne réponse. On peut donner la loi des variables aléatoires conditionnées $X|A$ et $X|\bar{A}$. En déduire $P(R|A)$ et $P(R|\bar{A})$.
2. Formule de Bayes.

Indication pour l'exercice 19 ▲

Calculer p_k/p_{k-1}.

Indication pour l'exercice 20 ▲

1. Reconnaitre une loi classique pour X_n.
2. La grenouille ne passe pas par la marche k si et seulement si elle passe par la marche $k-1$ et si elle fait un saut de deux marches.
3. Une boucle Tant Que s'impose...

Indication pour l'exercice 21 ▲

Écrire $P(X = n) = P(X > n-1) - P(X > n)$.

Indication pour l'exercice 22 ▲

Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Indication pour l'exercice 23 ▲

1. Raisonner par disjonction de cas, suivant que $X_2 > a$ ou non.
2. Calcul facile !
3. Exprimer $E(Y)$ sous la forme d'une somme de termes positifs ne dépendant pas de a, et d'un terme négatif dépendant de a. Il faut rendre ce terme le plus petit possible !

Indication pour l'exercice 24 ▲

1.
2. Pour un calcul, c'est très simple...
3. Idem !
4. On pourra utiliser la concavité de la fonction $x \mapsto -x\ln x$.

Indication pour l'exercice 25 ▲

1. Pour la loi binomiale, appliquer la formule du binome pour obtenir une expression simple.
2. Une fonction polynomiale nulle sur $\mathbb{R}$ a tous ses coefficients nuls.
3. Calculer $G'_X(1)$ puis $G''_X(1)$...
4. Noter $Z = X + Y$ et remarquer que $P(Z = k) = \sum_{i+j=k} P(X = i)P(Y = j)$.
5. Utiliser la question précédente et la question 2.

Indication pour l'exercice 26 ▲

1. Calculer $abcd$.
2. Raisonner par l'absurde en supposant l'existence de deux variables aléatoires X et Y dont la somme Z est uniformément distribuée sur $\{0,\dots,2n\}$. Appliquer la question précédente en calculant $P(Z = 0)$, $P(Z = 2n)$ et $P(Z = n)$.

Indication pour l'exercice 27 ▲

Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à une variable aléatoire suivant une loi binomiale.

Indication pour l'exercice 28 ▲

Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Indication pour l'exercice 29 ▲

1. C'est du cours.
2. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à X_n.
3.

Indication pour l'exercice 30 ▲

Appliquer l'inégalité de Markov à $Y = f(X)$.

Indication pour l'exercice 31 ▲

1. On est dans le cadre d'une répétition d'épreuves de Bernoulli indépendantes.
2. Utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
3.

4.

Indication pour l'exercice 32 ▲

1.
2.
3. On pourra utiliser que $\sup_{p\in[0,1]} p(1-p)1/4$.
4. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à P_n.
5.
6.

Indication pour l'exercice 33 ▲

1. S'inspirer de la preuve de l'inégalité de Tchebychev en utilisant la variable aléatoire $Y = X - E(X) + t$.
2. Optimiser en t.
3. Appliquer l'inégalité précédente à $Z = -X$.

Indication pour l'exercice 34 ▲

Déterminer toutes les valeurs possibles, puis remplir un tableau...

Indication pour l'exercice 35 ▲

Il s'agit essentiellement d'appliquer les définitions, et la formule permettant de retrouver les lois marginales connaissant la loi conjointe. On utilisera aussi $\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$.

Indication pour l'exercice 36 ▲

1. Utiliser des probabilités conditionnelles.
2.
3. On applique la définition et on permute les sommes.

Indication pour l'exercice 37 ▲

1. Utiliser les méthodes classiques. Pour la loi de $X+Y$, on pourra séparer les cas $X+Y \leq n$ et $X+Y \geq n$.
2. Utiliser la définition.

Correction de l'exercice 1 ▲

1. X prend ses valeurs dans $\{1,\dots,6\}$. Par hypothèse, il existe un réel a tel que $P(X=k)=ka$. Maintenant, puisque P_X est une loi de probabilité, on a :

$$\sum_{k=1}^{6} P(X=k)=1 \iff a\frac{6\times 7}{2}=1 \implies a=1/21.$$

On a donc :

k	1	2	3	4	5	6
$P(X=k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

On vérifie aisément en appliquant la formule $E(X)=\sum_{k=1}^{6} kP(X=k)$ que $E(X)=\frac{13}{3}$.

2. On a $X=k \iff Y=1/k$. Y prend donc ses valeurs dans $\{1,1/2,1/3,1/4,1/5,1/6\}$, et la loi est donnée par :

$1/k$	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6
$P(Y=1/k)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$

Le calcul de l'espérance n'est pas plus difficile, et donne :

$$E(Y)=\frac{2}{7}.$$

Attention à l'erreur suivante : ce n'est pas parce que $Y=1/X$ que $E(Y)=1/E(X)$!!!.

Correction de l'exercice 2 ▲

1. On note A_k l'aire de la couronne k, et A l'aire totale. Par les hypothèses d'équiprobabilité faites dans l'énoncé, on a

$$P(X=k)=\frac{A_k}{A}$$

pour k compris entre 1 et 10. Pour la couronne k, le cercle extérieur est de rayon $11-k$ et le cercle intérieur de rayon $10-k$ (un petit dessin pourra aider pour faire attention à l'inversion entre l'ordre des cercles et les rayons, et il faut aussi bien faire attention à ce que pour $k=1$, c'est $11-k=10$ qui donne le rayon de la cible). On a donc, en cm^2, $A_k=\pi\big((11-k)^2-(10-k)^2\big)=\pi(21-2k)$. On en déduit que

$$P(X=k)=\frac{21-2k}{100}.$$

2. Notons Y la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur. Y prend ses valeurs dans $-2,6,7,8,9,10$. L'événement "$Y=-2$" est égal à l'événement "$X\leq 5$", et donc

$$P(Y=-2)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=\frac{75}{100}$$

d'après le résultat de la question précédente. D'autre part, pour $k=6,\dots,10$, on a

$$P(Y=k)=P(X=k).$$

On en déduit le calcul de l'espérance de Y :

$$E(Y)=-2\times\frac{75}{100}+\frac{6\times 9+7\times 7+8\times 5+9\times 3+10\times 1}{100}=\frac{3}{10}.$$

L'espérance est positive. Le jeu est favorable au joueur. En moyenne, il peut espérer gagne 0,3 euros par partie.

Correction de l'exercice 3 ▲

On choisit pour univers $\Omega=\{1,\dots,6\}^2$ que l'on munit de la probabilité uniforme puisque les deux dés sont équilibrés. Remarquons que le cardinal de Ω vaut 36. X prend ses valeurs dans $\{1,\dots,6\}$. L'événement $X=1$ est égal à $\{(1,1)\}$ et donc

$$P(X=1)=\frac{1}{36}.$$

De même, on a

$$\begin{aligned}
P(X=2) &= P\big(\{(1,2);(2,1);(2,2)\}\big) = \frac{1}{12}\\
P(X=3) &= P\big(\{(1,3);(2,3);(3,3);(3,1);(3,2)\}\big) = \frac{5}{36}\\
P(X=4) &= P\big(\{(1,4);(2,4);(3,4);(4,4);(4,3);(4,2);(4,1)\}\big) = \frac{7}{36}\\
P(X=5) &= P\big(\{(1,5);(2,5);(3,5);(4,5);(5,5);(5,4);(5,3);(5,2);(5,1)\}\big) = \frac{1}{4}\\
P(X=6) &= P\big(\{(1,6);(2,6);(3,6);(4,6);(5,6);(6,6);(6,5);(6,4);(6,3);(6,2);(6,1)\}\big) = \frac{11}{36}.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 4 ▲

1. Y_n ne prend que deux valeurs, $1/n$ et $1+1/n$. On a en outre :

$$(Y_n = 1/n) \iff \text{aucune vache n'est malade}$$

d'où $P(Y_n = 1/n) = 0,85^n$. On en déduit que $P(Y_n = 1+1/n) = 1-(0,85)^n$. Le calcul de l'espérance donne :

$$E(Y_n) = \frac{0,85^n}{n} + \frac{n+1}{n}(1-0,85^n) = 1 + \frac{1}{n} - 0,85^n.$$

2. f est dérivable sur $]0,+\infty[$, et $f'(x) = \frac{1+ax}{x}$. $f'(x)$ est donc du signe de $1+ax$, ce qui permet de dire que f est croissante sur $]0,-1/a[$, et décroissante ensuite. La limite de f en $+\infty$ est $-\infty$, il en est de même en 0. En calculant les valeurs successives de $f(n)$, on a $f(17) > 0,07$ et $f(18) < -0,03$. 17 est donc la plus grande valeur entière pour laquelle $f(n)$ est positive. En outre, $f(1) < 0$ alors que $f(2) > 0$. L'ensemble d'entiers recherché est donc $\{2,\dots,17\}$.

3. On a :

$$\begin{aligned}
E(Y_n) < 1 &\iff 1 + \frac{1}{n} - 0,85^n < 1\\
&\iff 0,85^n > \frac{1}{n}\\
&\iff n\ln(0,85) > -\ln n.
\end{aligned}$$

Par suite, $E(Y_n) < 1 \iff f(n) > 0$. L'étude précédente montre que les entiers n pour lesquels $f(n) > 0$ est $\{2,\dots,17\}$. On a intérêt à choisir la deuxième méthode si, et seulement si, il y a de 2 à 17 vaches dans l'étable !

Correction de l'exercice 5 ▲

1. Notons Ω l'univers associé à l'expérience. On a bien sûr $X(\Omega) = \{1,\dots,n+1\}$. Pour $i = 1,\dots,n$, on note A_i l'événement : le i-ème candidat réussit le test. Pour $k \leq n$, on a

$$(X=k) = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \dots \cap \overline{A_{k-1}} \cap A_k.$$

Par la formule des probabilités composées, on trouve

$$P(X=k) = P(\overline{A_1}) P_{\overline{A_1}}(\overline{A_2}) \dots P_{\overline{A_1}\cap\dots\cap\overline{A_{k-1}}}(A_k).$$

Mais pour tout j, $P_{\overline{A_1}\cap\dots\cap\overline{A_{j-1}}}(\overline{A_j})$ est juste la probabilité que le candidat échoue au test (qu'il ne passe que si les candidats précédents ont tous échoué). Cette probabilité vaut donc $q = 1-p$. Finalement, on trouve donc

$$P(X=k) = q^{k-1}p.$$

D'autre part, $P(X=n+1)$ est la probabilité que tous les candidats échouent au test. On a donc

$$P(X=n+1) = q^n.$$

2. Posons $f(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$. La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. En dérivant des deux côtés de l'égalité, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n}kx^{k-1}=\frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(1-x)^2}.$$

3. L'espérance de X vaut donc

$$E(X)=\sum_{k=1}^{n}kq^{k-1}p+(n+1)q^n.$$

En tenant compte du résultat de la question précédente, et après simplifications, on trouve

$$E(X)=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

4. Un des candidats est recruté si et seulement si l'événement $X\leq n$ est réalisé. Il vient

$$P(X\leq n)=1-P(X=n+1)=1-q^n.$$

On a

$$P(X\leq n)\geq 1/2 \iff q^n\leq\frac{1}{2}\iff p\geq 1-\frac{1}{\sqrt[n]{2}}.$$

Correction de l'exercice 6 ▲

1. En utilisant les informations de l'énoncé sur l'héritage des gènes, on trouve

$$\begin{aligned}
P\big(E=1|(P,M)=(1,1)\big) &= 1\\
P\big(E=1|(P,M)=(1,2)\big)=P\big(E=1|(P,M)=(2,1)\big) &= \frac{1}{2}\\
P\big(E=1|(P,M)=(1,3)\big)=P\big(E=1|(P,M)=(3,1)\big) &= 0\\
P\big(E=1|(P,M)=(2,2)\big) &= \frac{1}{4}\\
P\big(E=1|(P,M)=(2,3)\big)=P\big(E=1|(P,M)=(3,2)\big) &= 0\\
P\big(E=1|(P,M)=(3,3)\big) &= 0.
\end{aligned}$$

On vérifie que l'on a bien écrit les 9 cas possibles pour (P,M).

2. On calcule $P(E=1)$ par la formule des probabilités totales :

$$P(E=1)=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}P\big(E=1|(P,M)=(i,j)\big)\times P\big((P,M)=(i,j)\big).$$

Les procréations étant supposées aléatoires, on a aussi

$$P\big((P,M)=(i,j)\big)=u_i(n)u_j(n).$$

On en déduit

$$P(E=1)=u_1(n)^2+\frac{1}{2}u_1(n)u_2(n)+\frac{1}{2}u_2(n)u_1(n)+\frac{1}{4}u_2(n)^2=\left(u_1(n)+\frac{1}{2}u_2(n)\right)^2.$$

Il est facile de calculer $P(E=3)$. Par symétrie des rôles de A et B, on a en effet

$$P(E=3)=\left(u_3(n)+\frac{1}{2}u_2(n)\right)^2.$$

Enfin,

$$P(E=2)=1-P(E=1)-P(E=3)=1-\left(u_1(n)+\frac{1}{2}u_2(n)\right)^2-\left(u_3(n)+\frac{1}{2}u_2(n)\right)^2.$$

3. On a

$$u_1(n+1) = P(E=1) = \theta(n)^2.$$

De plus, $u_1(n)+u_2(n)+u_3(n) = 1$, ce qui fait que

$$u_3(n) + \frac{u_2(n)}{2} = 1 - \theta(n).$$

Ainsi,

$$u_3(n+1) = \big(1-\theta(n)\big)^2$$

et

$$u_2(n+1) = 1 - \theta(n)^2 - \big(1-\theta(n)\big)^2.$$

4. Calculons θ_{n+1} en fonction de $\theta(n)$, pour $n \geq 1$. On a

$$\begin{aligned}
\theta(n+1) &= u_1(n+1) + \frac{u_2(n+1)}{2} \\
&= \theta(n)^2 + \frac{1}{2} - \frac{\theta(n)^2}{2} - \frac{\big(1-\theta(n)\big)^2}{2} \\
&= \theta(n).
\end{aligned}$$

Ainsi, pour $n \geq 1$, on a $\theta(n+1) = \theta(n)$ et donc d'après la question précédente, $u_i(n+2) = u_i(n+1)$. La proportion de malades dans la population ne varie plus à partir de la génération 2.

Correction de l'exercice 7 ▲

On a $E(X) = \frac{1}{a+1}\big(0+1+\cdots+a\big) = \frac{a}{2}$. On en déduit donc que $a = 12$.

Correction de l'exercice 8 ▲

1. X suit une loi uniforme sur $\{1,\ldots,n\}$.

2. On a $P(Y=k|X=i)$ vaut $1/i$ si $k \leq i$ et 0 si $k > i$, puisqu'on tire uniformément une boule numérotée de 1 à i.

3. D'après la formule des probabilités totales, les événements $(X=1)$, $(X=2),\ldots,(X=n)$ formant une partition de l'univers et étant de probabilité non nulle,

$$P(Y=k) = \sum_{i=1}^{n} P(Y=k|X=i)P(X=i) = \sum_{i=1}^{n} P(Y=k|X=i)\frac{1}{n}.$$

Or $P(Y=k|X=i)$ vaut $1/i$ si $k \leq i$ et 0 si $k > i$. On en déduit que

$$P(Y=k) = \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{ni}.$$

4. Pour calculer l'espérance, on applique la définition et on permute les sommes.

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n}\frac{k}{i} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i}k \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\times\frac{i(i+1)}{2} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{2} \\
&= \frac{1}{2n}\times\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1\right) \\
&= \frac{n+3}{4}.
\end{aligned}$$

Correction de l'exercice 9 ▲

1. Après k expériences, le nombre de boules dans l'urne vaut $k+2$.

2. On va procéder par récurrence sur k. Pour $k=0,\dots,n$, on note $\mathscr{P}(k)$ la propriété : "N_k suit une loi uniforme sur $\{1,\dots,k+1\}$", avec pour convention que N_0 désigne le nombre initial de boules blanches. Initialisation : $\mathscr{P}(0)$ est vraie puisque $N_0=1$. Hérédité : soit $k\in\{0,\dots,n-1\}$ tel que $\mathscr{P}(k)$ est vraie. Après la $k+1$-ème expérience, il y a $2+(k+1)=k+3$ boules dans l'urne, dont au moins une boule noire et au moins une boule blanche. Donc N_{k+1} est à valeurs dans $\{1,\dots,k+2\}$. De plus, pour $j=2,\dots,k$, comme on ajoute au plus une boule blanche lors de la $k+1$-ème expérience, on a

$$\begin{aligned}P(N_{k+1}=j) &= P(N_{k+1}=j|N_k=j)P(N_k=j)+P(N_{k+1}=j|N_k=j-1)P(N_k=j-1)\\ &= \frac{1}{k+1}\big(P(N_{k+1}=j|N_k=j)+P(N_{k+1}=j|N_k=j-1)\big).\end{aligned}$$

Maintenant, on passe de $N_k=j$ à $N_{k+1}=j$ en tirant une boule noire dans l'urne. A ce stade, il y a $k+2-j$ boules noires et $k+2$ boules au total, et donc

$$P(N_{k+1}=j|N_k=j)=\frac{k+2-j}{k+2}.$$

De même, on passe de $N_k=j-1$ à $N_k=j$ en tirant une boule blanche dans l'urne, et sous l'hypothèse $N_k=j-1$, il y a $j-1$ boules blanches dans l'urne pour $k+2$ boules au total. On en déduit

$$P(N_{k+1}=j|N_k=j-1)=\frac{j-1}{k+2}.$$

Finalement, on trouve

$$P(N_{k+1}=j)=\frac{1}{(k+1)(k+2)}\times(k+2-j+j-1)=\frac{1}{k+2}.$$

Ce calcul s'étend sans difficultés au cas $j=1$ - mais dans ce cas seul le premier terme existe - et au cas $j=k+1$ - mais dans ce cas seul le deuxième terme existe. On a bien prouvé que $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie et donc, par le principe de récurrence, que $\mathscr{P}(k)$ est vrai pour tout $k=1,\dots,n$.

Correction de l'exercice 10 ▲

1. Pour $i=1,\dots,6$, l'événement $X=i$ est réunion disjointe des trois événements suivants :
$A : U_1=i$ et $U_2=i$; $B : U_1=i$ et $U_2>i$; $C : U_1>i$ et $U_2=i$.
Par indépendance des variables aléatoires U_1 et U_2, on en déduit que

$$P(A)=\frac{1}{36},\ P(B)=\frac{6-i}{36}\text{ et }P(C)=\frac{6-i}{36}.$$

Il vient $P(X=1)=11/36$, $P(X=2)=9/36$, $P(X=3)=7/36$, $P(X=4)=5/36$, $P(X=5)=3/36$, $P(X=6)=1/36$. On en déduit $E(X)=91/36$.

2. $A : U_1=i$ et $U_2=i$;

3. $B : U_1=i$ et $U_2>i$;

4. $C : U_1>i$ et $U_2=i$.

5. On a $X+Y=U_1+U_2$ car (U_1,U_2) est une permutation de (X,Y). Il vient $E(X+Y)=E(X)+E(Y)=E(U_1)+E(U_2)=7$, puisque chaque U_i suit une loi uniforme sur $\{1,\dots,6\}$, son espérance vaut $(6+1)/2=7/2$. On en déduit $E(Y)=161/36$.

6. On a $XY=U_1U_2$. On en déduit

$$E(XY)=E(U_1U_2)=E(U_1)E(U_2)$$

par indépendance de ces deux variables aléatoires. D'où

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1225}{1296}.$$

Les deux variables ne sont pas indépendantes puisque leur covariance n'est pas nulle.

Correction de l'exercice 11 ▲

1. Remarquons que

$$X = Y \iff \exists k \in \{1,\dots,n\},\ X = k \text{ et } Y = k.$$

On a donc

$$P(X=Y) = \sum_{k=1}^{n} P(X=k \cap Y=k) = \sum_{k=1}^{n} P(X=k)P(Y=k)$$

puisque les variables aléatoires sont indépendantes. On en déduit

$$P(X=Y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$

2. On peut suivre une méthode similaire en étudiant tous les cas pour lesquels $X \geq Y$. Il y a plus simple. Il suffit de remarquer que, par symétrie du rôle joué par X et Y, on a

$$P(X \geq Y) = P(Y \geq X).$$

Or,

$$\begin{aligned} P\big((X \geq Y) \cup (Y \geq X)\big) &= P(X \geq Y) + P(Y \geq X) - P\big((X \geq Y) \cap (Y \geq X)\big) \\ &= 2P(X \geq Y) - P(X = Y). \end{aligned}$$

En utilisant le résultat de la question précédente, on trouve

$$1 = 2P(X \geq Y) - \frac{1}{n} \implies P(X \geq Y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

3. Remarquons que

$$X + Y = k \iff \exists i \in \{1,\dots,k-1\},\ X = i \text{ et } Y = k - i.$$

Il vient, pour tout $k = 2,\dots 2n$ (valeurs possibles prises par $X+Y$), que

$$P(X+Y=k) = \sum_{i=1}^{k-1} P\big((X=i) \cap (Y=k-i)\big) = \sum_{i=1}^{k-1} P(X=i)P(Y=k-i)$$

par indépendance de X et Y. En réalité, on peut sommer sur un ensemble d'indices plus petit. En effet, $P(X = i) \neq 0$ implique que $1 \leq i \leq n$ et $P(Y = k-i) \neq 0$ implique que $1 \leq k-i \leq n$, soit $k-n \leq i \leq k-1$. On distingue alors deux cas :

Si $k \leq n$, alors $k - n \leq 0$ et on effectue une somme de 1 à $k-1$ de termes tous égaux à $1/n^2$. On en déduit que dans ce cas

$$P(X+Y=k) = \frac{k-1}{n^2}.$$

Si $k > n$, alors $n \leq k-1$ et on effectue une somme de $k-n$ à n de termes tous égaux à $1/n^2$. Dans ce cas,

$$P(X+Y=k) = \frac{2n+1-k}{n^2}.$$

4. Si $k \leq n$, alors $k - n \leq 0$ et on effectue une somme de 1 à $k-1$ de termes tous égaux à $1/n^2$. On en déduit que dans ce cas

$$P(X+Y=k) = \frac{k-1}{n^2}.$$

5. Si $k > n$, alors $n \leq k-1$ et on effectue une somme de $k-n$ à n de termes tous égaux à $1/n^2$. Dans ce cas,

$$P(X+Y=k) = \frac{2n+1-k}{n^2}.$$

Correction de l'exercice 12 ▲

1. Remarquons que l'on a $M \geq k$ si et seulement si, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$, $X_i \geq k$. Par indépendance de $X_1,\dots,X_n$, on en déduit que

$$\begin{aligned} P(M \geq k) &= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \geq k) \\ &= \left(\frac{n+1-k}{n}\right)^n \end{aligned}$$

où la dernière égalité vient du fait que X_i suit une loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$.

2. On a $(M \geq k) = (M = k) \cup (M \geq k+1)$. Les deux événements à droite de l'égalité étant disjoints, on en déduit que

$$P(M \geq k) = P(M = k) + P(M \geq k+1).$$

D'après le résultat de la question précédente, on tire

$$P(M = k) = \left(\frac{n+1-k}{n}\right)^n - \left(\frac{n-k}{n}\right)^n.$$

3. On remarque que $A = (M = 1)$. On en déduit que

$$P(A) = P(M = 1) = 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n.$$

On conclut en utilisant l'inégalité classique $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x > -1$, qui entraîne successivement

$$\ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{-1}{n} \implies n \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq -1$$

qui finalement donne

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \leq e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

Correction de l'exercice 13 ▲

On note X la variable aléatoire du nombre de moteurs de A qui tombent en panne, et Y la variable aléatoire du nombre de moteurs de B qui tombent en panne. X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(4,p)$. En particulier, on a :

$$P(X=0) + P(X=1) = \binom{4}{0} p^0 (1-p)^{4-0} + \binom{4}{1} p^1 (1-p)^{4-1} = (1-p)^4 + 4p(1-p)^3.$$

D'autre part, Y suit une loi binomiale $\mathscr{B}(2,p)$. En particulier,

$$P(Y=0) = (1-p)^2.$$

On a intérêt à prendre l'avion A si $P(X=0) + P(X=1) \geq P(Y=0)$. Ceci donne :

$$p(1-p)^2(2-3p) \geq 0.$$

Donc, si $0 \leq p < 2/3$ (cas que l'on espère être celui du monde réel), il est préférable de choisir A. Si $p = 2/3$, le choix est indifférent, et si $p > 2/3$, il vaut mieux choisir B.

Correction de l'exercice 14 ▲

Soit X la variable aléatoire comptant le nombre de crèmes brûlées commandées chaque soir. X compte le nombre de succès (=crème brûlée commandée) dans la répétition indépendante de 70 épreuves de Bernoulli dont chacune a une probabilité de succès égale à 0.4. Ainsi, X suit une loi binomiale de paramètre 70 et 0.4.

1. La demande est satisfaite si $X \leq 30$. On doit donc déterminer si $P(X \leq 30) \geq 0.7$. A l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, on trouve facilement que $P(X \leq 30) \simeq 0,73$: le restaurateur a raison.

2. On cherche le plus petit entier k tel que $P(X \leq k) \geq 0,9$. Toujours à l'aide d'un tableur, on constate que $P(X \leq 32) \simeq 0,86$ et que $P(X \leq 33) \simeq 0,91$. Il suffit de préparer 33 crèmes brûlées pour satisfaire la clientèle dans 90% des cas. Ca vaut peut-être le coup de fabriquer 3 crèmes supplémentaires !

Correction de l'exercice 15 ▲

Notons A l'événément "obtenir strictement plus de piles que de faces" et B l'événément "obtenir strictement plus de faces que de piles". La pièce étant parfaitement équilibrée, par symétrie, $P(A) = P(B)$. On distingue alors deux cas :

n est impair. Dans ce cas, le couple (A,B) est un système complet d'événements et $P(A) = \frac{1}{2}$. $n = 2r$ est pair. Notons X la variable aléatoire du nombre de piles obtenues. X suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n,1/2)$. On a

$$A = (X > r) \text{ et } B = (X < r).$$

On a donc

$$P(A) + P(B) + P(X = r) = 1 \implies P(A) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}P(X = r) = \frac{1}{2} - \binom{2r}{r}\left(\frac{1}{2}\right)^{2r+1}.$$

Correction de l'exercice 16 ▲

1. Notons C_i l'évènement "le candidat connait la réponse à la i-ème question.". D'après la formule des probabilités totales, puisque $(C_i, \overline{C_i})$ forme une partition de l'univers,

$$P(A_i) = P_{C_i}(A_i)P(C_i) + P_{\bar{C}_i}(A_i)P(\bar{C}_i) = 1 \times p + \frac{1}{4} \times (1-p) = \frac{1+3p}{4}.$$

2. Les questions étant toutes indépendantes, on est en présence d'un schéma de Bernoulli et la variable S qui compte le nombre de bonnes réponses suit une loi binomiale de paramètres 40 et $\frac{1+3p}{4}$.

3. L'espérance de S vaut $E(S) = 40\frac{1+3p}{4} = 10(1+3p)$. On a donc $E(S) \geq 36$ si et seulement si $10(1+3p) \geq 36$, ce qui revient à dire $p \geq \frac{13}{15}$.

Correction de l'exercice 17 ▲

1. On reconnait le principe d'un schéma de Bernoulli, avec 20 épreuves indépendantes et une probabilité p de succès. X suit donc une loi binomiale $\mathscr{B}(20,p)$.

2. On a $P(X = 8) = \binom{20}{8}p^8(1-p)^{12}$. On va étudier cette fonction de p de sorte de trouver son maximum. Il suffit en réalité d'étudier, sur $[0,1]$, la fonction $g(p) = p^8(1-p)^{12}$. g est dérivable et sa dérivée est

$$\begin{aligned} g'(p) &= 8p^7(1-p)^{12} - 12p^8(1-p)^{11} \\ &= \big(8(1-p) - 12p\big)p^7(1-p)^{11} \\ &= \big(8-20p\big)p^7(1-p)^{11}. \end{aligned}$$

On en déduit que $g'(p) \geq 0$ sur $[0,2/5]$ et $g'(p) \leq 0$ sur $[2/5,1]$. La probabilité $P(X = 8)$ est maximale pour $p = 2/5$.

Correction de l'exercice 18 ▲

1. Notons A l'événement "l'étudiant a préparé l'examen", R l'événement "l'étudiant a réussi l'examen" et X la variable aléatoire du nombre de questions ayant eu une bonne réponse. On ne connait pas directement la loi de X, mais il est facile de donner la loi des variables aléatoires "conditionnées" $X|A$ et $X|\bar{A}$. Elles suivent des lois binomiales de paramètre 15 et, respectivement, 0,8 et 1/3. Plus précisément, pour tout k dans $\{0,\ldots,15\}$, on a

$$P(X = k|A) = \binom{15}{k}(0,8)^k(0,2)^{15-k}$$

$$P(X=k|\bar{A}) = \binom{15}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{15-k}.$$

On en déduit que

$$P(R|A) = \sum_{k=8}^{15} P(X=k|A) \simeq 0,996$$

tandis que

$$P(R|\bar{A}) = \sum_{k=8}^{15} P(X=k|\bar{A}) \simeq 0,088.$$

On en déduit, par la formule des probabilités totales :

$$P(R) = P(A)P(R|A) + P(\bar{A})P(R|\bar{A}) \simeq 0,724.$$

2. D'après la formule de Bayes,

$$P(A|\bar{R}) = \frac{P(\bar{R}|A)P(A)}{P(\bar{R})} = \frac{(1-P(R|A))P(A)}{1-P(R)} \simeq 0,011.$$

Les résultats des deux questions sont finalement très réconfortants sur la pertinence de cet examen.

Correction de l'exercice 19 ▲

Soit $k \geq 1$. On a

$$p_k = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}p^k(1-p)^{n-k}.$$

La présence de factorielles et de puissances nous incite à étudier la monotonie de la suite (p_k) par l'étude du quotient p_k/p_{k-1} :

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{p}{1-p} \times \frac{n-k+1}{k}.$$

On en déduit

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} \geq 1 \iff k(1-p) \leq (n-k+1)p \iff k \leq np+p.$$

Notons k_0 la partie entière de $(n+1)p$. La suite (p_k) est donc croissante jusqu'en k_0 et décroissante ensuite. La valeur maximale est donc atteinte en k_0. Remarquons que si $(n+1)p$ est un entier, alors on a également $p_{k_0-1} = p_{k_0}$ et le maximum est atteint en deux valeurs (c'est le seul cas possible).

Correction de l'exercice 20 ▲

1. On a affaire ici à un schéma de Bernoulli : X_n compte le nombre de fois où n expériences indépendantes (les n premiers sauts) donnent un résultat ayant probabilité p. La variable aléatoire X_n suit donc une loi binomiale de paramètres n et p. Le nombre de marches franchies est alors

$$Y_n = X_n + 2(n-X_n) = 2n - X_n.$$

Par linéarité de l'espérance, on trouve

$$E(Y_n) = 2n - E(X_n) = 2n - np = (2-p)n.$$

De plus, on a

$$V(Y_n) = V(X_n) = np(1-p).$$

2. On a $p_1 = p$: il faut que le premier saut de la grenouille soit un saut d'une marche. Pour déterminer p_2, on remarque que la grenouille passe par la marche 2 si le premier saut est un saut de deux marches ou si les deux premiers sauts sont des sauts de une marche. On a donc $p_2 = 1-p+p^2$. On observe que la grenouille ne passe pas par la marche k si elle passe par la marche $k-1$ et si elle fait un saut de deux marches. On a donc :

$$1-p_k = (1-p)p_{k-1} \iff p_k = 1-(1-p)p_{k-1}.$$

On reconnait une suite arithmético-géométrique : la suite $u_k = p_k - \frac{1}{2-p}$ est une suite géométrique de raison $p-1$, et donc on a $u_k = (p-1)^{k-1}u_1$, ce qui signifie que $p_k = \frac{1}{2-p} + (1-p)^{k-1}u_1$. Puisque $u_1 = p - \frac{1}{2-p} = \frac{2p-p^2-1}{2-p}$, on a finalement :

$$p_k = \frac{1}{2-p} + (p-1)^{k-1}\frac{2p-p^2-1}{2-p}.$$

3. Voici un algorithme possible : Variables : n entier hauteur entier saut entier Traitement : Lire n hauteur=0 saut=0 Tant que (hauteur<n) faire Si (alea()<p) faire hauteur=hauteur+1 Sinon faire hauteur=hauteur+2 Fin si. saut=saut+1 ; Fin Tant que. Afficher saut

---

Correction de l'exercice 21 ▲

La clé est d'écrire $P(X=n) = P(X>n-1) - P(X>n)$. D'après la définition de l'espérance, on a

$$E(X) = \sum_{n=1}^{N} nP(X>n-1) - \sum_{n=1}^{N} nP(X>n).$$

On effectue un décalage d'indice dans la première somme :

$$E(X) = \sum_{n=0}^{N-1} (n+1)P(X>n) - \sum_{n=1}^{N} nP(X>n).$$

Dans la deuxième somme, le terme d'indice N est nul, et on peut aussi ajouter un terme d'indice 0 qui sera nul lui aussi. Il vient donc

$$E(X) = \sum_{n=0}^{N-1} \big((n+1)-n\big)P(X>n) = \sum_{n=0}^{N-1} P(X>n).$$

Correction de l'exercice 22 ▲

Soit $x_1, \dots, x_n$ les valeurs prises par X, avec probabilités respectives p_k. On a

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k = \sum_{k=1}^{n} (x_k\sqrt{p_k})\sqrt{p_k}.$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz avec $a_k = x_k\sqrt{p_k}$ et $b_k = \sqrt{p_k}$. On en déduit que

$$E(X)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} p_k\right) = E(X^2).$$

On peut aussi (plus simplement sans doute) utiliser que $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 et que la variance est toujours positive ou nulle$

Correction de l'exercice 23 ▲

1. On a $Y(\Omega) = \{1, \dots, n\}$, et par indépendance des variables aléatoires X_1 et X_2 :
si $k \leq a$, $P(Y=k) = P((X_1=k)\cap(X_2\leq a)) = \frac{1}{n}\times\frac{a}{n}$. si $k>a$, $P(Y=k) = P((X_1=k)\cap(X_2\leq a)) + P((X_2=k)\cap(X_2>a)) = \frac{a}{n^2} + \frac{1}{n}$.
On a bien $a\times\frac{a}{n^2} + (n-a)\times\left(\frac{a}{n^2}+\frac{1}{n}\right) = 1$.
2. si $k\leq a$, $P(Y=k) = P((X_1=k)\cap(X_2\leq a)) = \frac{1}{n}\times\frac{a}{n}$.
3. si $k>a$, $P(Y=k) = P((X_1=k)\cap(X_2\leq a)) + P((X_2=k)\cap(X_2>a)) = \frac{a}{n^2} + \frac{1}{n}$.
4. Le calcul de l'espérance est facile :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^{a} k\frac{a}{n^2} + \sum_{k=a+1}^{n} k\frac{a}{n^2} + \sum_{k=a+1}^{n}\frac{k}{n} \\ &= \frac{a(n+1)}{2n} + \frac{(a+n+1)(n-a)}{2n} \\ &= E(X_1) + \frac{a}{2n}(n-a) \geq E(X_1). \end{aligned}$$

5. On vérifie que :

$$E(Y) = \frac{1}{2n}\left(\frac{5}{4}n^2 + n - (a - n/2)^2\right).$$

Ainsi, $E(Y)$ est maximale pour $|a - n/2|$ le plus petit possible :

si n est pair, c'est pour $a = n/2$. si n est impair, c'est pour $a = (n-1)/2$ ou $a = (n+1)/2$.

6. si n est pair, c'est pour $a = n/2$.

7. si n est impair, c'est pour $a = (n-1)/2$ ou $a = (n+1)/2$.

Correction de l'exercice 24 ▲

1. On remarque que $x\ln(x) \leq 0$ si $x \in [0,1[$ ce qui assure que $H(X) \geq 0$.

2. Si X est presque sûrement constante, on a $p_i = 1$ pour un i et $p_j = 0$ pour $j \neq i$. On en déduit que $H(X) = -1 \times \ln(1) = 0$. Réciproquement, si $H(X) = 0$, alors la preuve de la question précédente implique que, pour tout $i = 1, \ldots, n$, on doit avoir $p_i \ln(p_i) = 0$. Ceci implique $p_i = 0$ ou $p_i = 1$. Puisque la somme des p_i doit être égale à 1, un des p_i est donc égal à 1, et tous les autres p_j sont nuls : X est presque sûrement constante.

3. Posons pour $x \in]0, +\infty[$, $g(x) = -x\ln x - (1-x)$. g est dérivable sur $]0, +\infty[$, de dérivée $g'(x) = -\ln x - 1 + 1 = -\ln x$. Ainsi, g est strictement croissante sur $]0,1[$ et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$. Puisque $g(1) = 0$, on en déduit que $g(x) \leq 0$ si $x > 0$ avec égalité si et seulement si $x = 1$, et donc $-x\ln x \leq 1 - x$, avec égalité si et seulement si $x = 1$. On en déduit que, pour tout $k = 1, \ldots, n$,

$$(-np_k)\ln(np_k) = -np_k\ln(n) - np_k\ln(p_k) \leq 1 - np_k$$

avec égalité si et seulement si $np_k = 1$.

4. On somme les inégalités précédentes, pour k allant de 1 à n :

$$-n\ln n + nH(X) \leq n - n = 0.$$

Ceci prouve le résultat voulu.

5. Si $H(X) = \ln n$, toutes les inégalités précédentes doivent être des égalités. On en déduit que $(-np_k)\ln(np_k) = 1 - np_k$ pour tout $k = 1, \ldots, n$, c'est-à-dire, $p_k = 1/n$. Ainsi, si $H(X) = \ln n$, X est équirépartie. Réciproquement, si X est équirépartie, on a $p_i = 1/n$ pour tout i. On en déduit

$$H(X) = \sum_{i=1}^{n} -\frac{\ln(1/n)}{n} = -\ln(1/n) = \ln(n).$$

$H(X)$ mesure le désordre engendré par X. Lorsque X est presque sûrement constante, son entropie est nulle (pas de désordre). Lorsque la variable est équidistribuée, le désordre est maximal et l'entropie aussi.

Correction de l'exercice 25 ▲

1. Dans le cas d'une loi de Bernoulli, on a simplement :

$$G_X(x) = (1-p) + px.$$

Pour le cas d'une loi binomiale, on a

$$G_X(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} x^k = (1 - p + px)^n.$$

2. Il est d'abord clair que si X et Y ont la même loi, alors elles ont même fonction génératrice. Réciproquement, si $G_X = G_Y$, alors $G_X - G_Y$ est un polynôme qui s'annule sur $\mathbb{R}$. Tous ses coefficients sont nuls. Or le coefficient devant x^k est précisément $P(X = k) - P(Y = k)$. Ainsi, on a pour tout k, $P(X = k) = P(Y = k)$ et donc X et Y ont même loi.

3. On a $G'_X(x) = \sum_{k=1}^{n} kp_k x^{k-1}$ et $G''_X(x) = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)p_k x^{k-2}$. On en déduit que

$$G'_X(1) = \sum_{k=1}^{n} kp_k = E(X)$$

puis que

$$G_X''(1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 p_k - \sum_{k=1}^{n} k p_k = E(X^2) - E(X).$$

On en déduit finalement que

$$G_X''(1) + G_X'(1) - \big(G_X'(1)\big)^2 = E(X^2) - E(X) + E(X) - \big(E(X)\big)^2 = V(X).$$

Pour la loi binomiale, on a

$$G_X'(x) = np(1-p+px)^{n-1} \text{ et } G_X''(x) = n(n-1)p^2(1-p+px)^{n-2}.$$

Il vient

$$E(X) = np$$

et

$$V(X) = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = np(1-p).$$

4. Supposons X à valeurs dans $\{0,\dots,n\}$ et Y à valeurs dans $\{0,\dots,m\}$ et notons $Z = X+Y$. Pour k entre 0 et $n+m$, n a $(Z=k) = \bigcup_{i+j=k}(X=i, Y=j)$ et donc

$$P(Z=k) = \sum_{i+j=k} P\big((X=i)\cap(Y=j)\big) = \sum_{i+j=k} P(X=i)P(Y=j)$$

puisque X et Y sont indépendantes. Notons $a_k = P(X=k)$, $b_k = P(Y=k)$ et $c_k = P(Z=k)$. La relation précédente s'écrit

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

C'est bien que

$$\sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right)$$

c'est-à-dire

$$G_Z(x) = G_X(x) G_Y(x).$$

Par une récurrence immédiate, si $X_1,\dots,X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes et si $Z = X_1 + \cdots + X_n$, alors

$$G_Z(x) = \prod_{i=1}^{n} G_{X_i}(x).$$

Une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p étant la somme de n variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre p, on retrouve facilement la formule donnant la fonction génératrice d'une loi binomiale à partir de la fonction génératrice d'une loi de Bernoulli.

5. On a $G_X(x) = (1-p+px)^n$, $G_Y(x) = (1-p+px)^m$ et donc $G_Z(x) = (1-p+px)^{n+m}$. La fonction génératrice caractérisant la loi, on voit d'après la première question que Z suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n+m,p)$.

Correction de l'exercice 26 ▲

1. On a $abcd = \lambda^2$ d'après les deux premières équations. D'autre part, puisque tout est positif, on a $ac < \lambda$ et $bd < \lambda$ et donc $abcd < \lambda^2$, une contradiction.

2. Supposons que ces deux variables aléatoires existent, et notons les X et Y. Posons $Z = X+Y$, $a_k = P(X=k)$, $b_k = P(Y=k)$ et $c_k = P(Z=k)$. Pour chaque k, on a

$$c_k = P(Z=k) = \sum_{i+j=k} P\big((X=i, Y=j)\big) = \sum_{i+j=k} a_i b_j$$

puisque les variables aléatoires X et Y sont indépendantes. Pour $k=0$, $k=2n$ et $k=n$, on obtient alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n+1} &= a_0 b_0 \\ \frac{1}{2n+1} &= a_n b_n \\ \frac{1}{2n+1} &\geq a_0 b_n + a_n b_0 \end{aligned}$$

Il suffit alors d'appliquer le résultat de la question précédente avec $a = a_0$, $b = b_0$, $c = a_n$, $d = b_n$ et $\lambda = \frac{1}{2n+1}$ pour obtenir une contradiction.

Correction de l'exercice 27 ▲

Soit S la variable aléatoire comptant le nombre d'apparitions du chiffre 1 au cours de ces lancers. S suit une loi binomiale de paramètres 3600 et 1/6. On sait donc que $E(S) = 600$ et $V(S) = 500$. Remarquons en outre que

$$480 < S < 720 \iff -120 < S - 600 < 120 \iff |S - 600| < 120.$$

Par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$P(|S - 600| \geq 120) \leq \frac{500}{120^2} \leq 0,035.$$

On en déduit que

$$P(480 < S < 720) \geq 1 - 0,035 = 0,965.$$

En particulier, la probabilité que le numéro 1 apparaisse entre 480 et 720 fois au cours de ces 3600 lancers est supérieur à 0,96.

Correction de l'exercice 28 ▲

On a $E(S_n) = m_n$ et puisque les variables aléatoires sont indépendantes,

$$V(S_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} V(X_k).$$

On a $V(X_k) = p_k(1 - p_k) \leq 1$ et donc $V(S_n) \leq \frac{1}{n}$. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on en déduit que

$$0 \leq P(|S_n - m_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{n\varepsilon^2}$$

et donc le terme au milieu tend bien vers 0 d'après le théorème des gendarmes.

Correction de l'exercice 29 ▲

1. X_n est la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre p. Ainsi, X_n suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$. On en déduit que

$$E(X_n) = np \text{ et } V(X_n) = np(1 - p).$$

2. Appliquons l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à X_n. On a donc

$$P(|X_n - E(X_n)| \geq a) \leq \frac{V(X_n)}{a^2}.$$

Or,

$$\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon \iff |X_n - np| \geq n\varepsilon \iff |X_n - E(X_n)| \geq n\varepsilon.$$

On applique donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev avec $a = n\varepsilon$ et on trouve que

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

Mais sur $[0, 1]$, la fonction $x \mapsto x(1 - x)$ admet un maximum égal à $1/4$ (et atteint en $1/2$). On en déduit le résultat voulu. On pouvait aussi remarquer que c'est directement le résultat qui conduit à la loi faible des grands nombres.

3. On cherche n tel que $P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| < 10^{-2}\right) \geq 0,95$ soit encore, en passant à l'événement contraire $P\left(\left|\frac{X_n}{n} - p\right| \geq 10^{-2}\right) \leq 0,05$. Il suffit donc de choisir n tel que $\frac{1}{4n10^{-4}} \leq 0,05$ soit $n \geq 5 \cdot 10^4$.

Correction de l'exercice 30 ▲

Soit Ω l'univers où est défini X. Par croissance de la fonction f, pour tout $\omega \in \Omega$, on a

$$X(\omega) \geq a \implies f(X(\omega)) \geq f(a).$$

Posons $Y = f(X)$ et appliquons l'inégalité de Markov à Y. On a donc

$$\begin{aligned} P(X \geq a) &\leq P(f(X) \geq f(a)) \\ &\leq \frac{E(f(X))}{f(a)}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 31 ▲

1. S_n compte le nombre de succès (se présenter à l'embarquement) lors de la réalisation de n épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre $p = 0{,}75$. S_n suit donc une loi binomiale $\mathscr{B}(n, p)$.

2. Remarquons que

$$S_n \geq 150 \implies S_n - np \geq 150 - np \implies |S_n - np| \geq |150 - np|$$

puisque $150 - np \geq 0$. On peut alors appliquer l'inégalité de Tchebychev qui donne immédiatement le résultat, puisque $E(S_n) = np$ et $V(S_n) = np(1-p)$.

3. La résolution de cette inéquation du second degré donne $x \in [0; 125]$.

4. Si $np \leq 125$, en particulier si $n \leq 166$, alors on sait que $P(S_n \geq 150) \leq 0{,}05$. Si la compagnie vend 166 billets, la probabilité que plus de 150 clients se présentent à l'embarquement est inférieure à 0,05.

Correction de l'exercice 32 ▲

1. X prend les deux valeurs 1 et 0. De plus, puisque le point est tiré uniformément sur le carré unité, on a

$$P(X = 1) = \frac{\text{aire(disque unité)}}{\text{aire(carré unité)}} = \frac{\pi}{4}.$$

2. import numpy as np ; def simulX() : x=np.random.rand() y=np.random.rand() if ((x*x+y*y)<=1) : return 1 else : return 0

3. S_n suit une loi binomiale de paramètres n et p.

4. On observe que $E(P_n) = \frac{4}{n}E(S_n) = \pi$ et que

$$V(P_n) = \frac{16}{n^2}V(S_n) = \frac{16}{n^2} \times n \times \frac{\pi}{4} \times \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi(4-\pi)}{n}.$$

L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à P_n donne

$$P\left(|P_n - \pi| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\pi(4-\pi)}{n\varepsilon^2}.$$

5. On remarque que

$$P(|P_n - \pi| < 10^{-2}) = 1 - P(|P_n - \pi| \geq 10^{-2})$$

et donc que l'inégalité $P(|P_n - \pi| < 10^{-2}) \geq 0{,}95$ est équivalente à

$$P(|P_n - \pi| \geq 10^{-2}) \leq 0{,}05.$$

On applique l'inégalité précédente avec $\varepsilon = 10^{-2}$. Il suffit donc de choisir n tel que

$$\frac{\pi(4-\pi)}{n10^{-4}} \leq 0{,}05 \iff n \geq \frac{10^4\pi(4-\pi)}{0{,}05}.$$

Le choix de $n = 539354$ convient. On peut remarquer que c'est beaucoup pour une approximation assez médiocre !

6. def approxpi() : p=0 for i in range(539354) : p=p+simulX() return 4*p/539354 ;

Correction de l'exercice 33 ▲

1. Considérons la variable aléatoire $Y = X - E(X) + t$. On a

$$X - E(X) \geq a \iff X - E(X) + t \geq a + t$$

et ceci entraîne, puisque $a + t \geq 0$,

$$\big(X - E(X) + t\big)^2 \geq (a+t)^2.$$

L'événement $X - E(X) \geq a$ est donc inclus dans l'événement $\big(X - E(X) + t\big)^2 \geq (a+t)^2$. On en déduit

$$\begin{aligned} P\big(X - E(X) \geq a\big) &\leq P\Big(\big(X - E(X) + t\big)^2 \geq (a+t)^2\Big) \\ &\leq \frac{E\Big(\big(X - E(X) + t\big)^2\Big)}{(a+t)^2} \end{aligned}$$

d'après l'inégalité de Markov. De plus,

$$\begin{aligned} E\Big(\big(X - E(X) + t\big)^2\Big) &= E\Big(\big(X - E(X)\big)^2\Big) + 2tE\Big(X - E(X)\Big) + t^2 \\ &= V(X) + 0 + t^2 \\ &= V(X) + t^2. \end{aligned}$$

On a donc démontré que

$$P\big(X - E(X) \geq a\big) \leq \frac{t^2 + V(X)}{(a+t)^2}.$$

2. On va chercher la valeur de t pour laquelle le membre de droite de l'inégalité précédente est le plus petit possible. Pour cela, on pose, pour $t \geq 0$, $f(t) = \frac{t^2+V(X)}{(a+t)^2}$. La fonction f est dérivable sur $[0, +\infty[$ et, sur cet intervalle,

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{2t(a+t)^2 - 2(a+t)(t^2+V(X))}{(a+t)^4} \\ &= \frac{2(at - V(X))}{(a+t)^3}. \end{aligned}$$

La fonction f atteint donc son minimum en $t = V(X)/a$, et en ce point elle vaut

$$f(V(X)/a) = \frac{\frac{V(X)^2}{a^2} + V(X)}{\Big(\frac{V(X)}{a} + a\Big)^2} = \frac{\frac{V(X)}{a}\Big(\frac{V(X)}{a} + a\Big)}{\Big(\frac{V(X)}{a} + a\Big)^2} = \frac{V(X)}{V(X) + a^2}.$$

Ceci démontre le resultat demandé.

3. Si on applique l'inégalité précédente à $Z = -X$, qui a la même variance que X, alors on obtient

$$P\Big(-\big(X - E(X)\big) \geq a\Big) \leq \frac{V(X)}{V(X) + a^2}.$$

Puisque

$$|X - E(X)| \geq a = \Big(\big(X - E(X)\big) \geq a\Big) \cup \Big(-\big(X - E(X)\big) \geq a\Big),$$

on a bien

$$P\big(|X - E(X)| \geq a\big) \leq \frac{2V(X)}{V(X) + a^2}.$$

Cette inégalité est meilleure que l'inégalité de Tchebychev si et seulement si

$$\frac{2V(X)}{V(X)+a^2} \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

c'est-à-dire si et seulement si $V(X) \geq a^2$ (ou $V(X)=0$).

Correction de l'exercice 34 ▲

L'univers Ω est $\Omega = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}\}$ et on considère que tous les événements sont équiprobables. On peut résumer la loi conjointe de U et V et les lois marginales grâce au tableau suivant :

$U\backslash V$	2	3	4	$P(U=u)$
1	1/6	1/6	1/6	1/2
2	0	1/6	1/6	1/3
3	0	0	1/6	1/6
$P(V=v)$	1/6	1/3	1/2	

Correction de l'exercice 35 ▲

Commençons par prouver *ii.* $\Longrightarrow$ *i.*, qui est le sens le plus facile. Soit $(x,y) \in E \times F$. Puisque X et Y sont indépendantes, on a

$$P\big((X,Y)=(x,y)\big) = P(X=x)P(Y=y) = \frac{1}{\text{card}(E)} \times \frac{1}{\text{card}(F)} = \frac{1}{\text{card}(E\times F)}$$

où on a utilisé que $X \sim \mathscr{U}(E)$, $Y \sim \mathscr{U}(F)$, et que $\text{card}(E\times F) = \text{card}(E)\times\text{card}(F)$. Réciproquement, on suppose *i.*. On retrouve facilement les lois marginales de X et de Y. Par exemple, pour $x \in E$, on a

$$P(X=x) = \sum_{y\in F} P\big((X,Y)=(x,y)\big) = \sum_{y\in F} \frac{1}{\text{card}(E\times F)} = \frac{\text{card}(F)}{\text{card}(E\times F)} = \frac{1}{\text{card}(E)}.$$

Ainsi, on a bien $X \sim \mathscr{U}(E)$ et de même $Y \sim \mathscr{U}(F)$. Enfin, X et Y sont bien indépendantes puisque

$$P\big((X,Y)=(x,y)\big) = P(X=x)\times P(Y=y)$$

d'après la formule $\text{card}(E\times F) = \text{card}(E)\times\text{card}(F)$.

Correction de l'exercice 36 ▲

1. Pour tout (i,j) dans $\{1,\dots,n\}^2$, on a

$$P\big((X,Y)=(i,j)\big) = P(X=i)P(Y=j|X=i).$$

On en déduit que si $j>i$, alors $P\big((X,Y)=(i,j)\big)=0$ alors que si $j\leq i$,

$$P\big((X,Y)=(i,j)\big) = \frac{1}{n}\times\frac{1}{i}.$$

2. Y prend ses valeurs dans $\{1,\dots,n\}$ et on a

$$P(Y=k) = \sum_{i=1}^{n} P\big((X=i,Y=k)\big) = \sum_{i=k}^{n} P\big((X=i,Y=k)\big) = \sum_{i=k}^{n} \frac{1}{ni}.$$

3. Pour calculer l'espérance, on applique la définition et on permute les sommes.

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=k}^{n}\frac{k}{i} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{i}k \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}\times\frac{i(i+1)}{2} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{i+1}{2} \\ &= \frac{1}{2n}\times\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}-1\right) \\ &= \frac{n+3}{4}. \end{aligned}$$

Correction de l'exercice 37 ▲

1. X est à valeurs dans $\{0,\dots,n\}$. On a, pour tout k de $\{0,\dots,n\}$,

$$P(X=k)=\sum_{i=0}^{n}P\big((X,Y)=(k,i)\big)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{1}{n+1}.$$

X suit donc une loi uniforme sur $\{0,\dots,n\}$. Par symétrie, il en est de même de Y. La variable aléatoire $X+Y$ est à valeurs dans $\{0,\dots,2n\}$ et pour tout k dans cet intervalle d'entiers, on a

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}P\big((X=i,Y=k-i)\big).$$

Si $k\leq n$, ceci devient égal à

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{k+1}{(n+1)^2}.$$

Si $k>n$, la somme ne peut aller que jusque n (car $i\leq n$) et ne peut commencer qu'en $k-n$ (car $k-i\leq n$) et donc

$$P(X+Y=k)=\sum_{i=k-n}^{n}\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{2n-k+1}{(n+1)^2}.$$

2. Les variables X et Y sont indépendantes, car pour tout couple (i,j) de $\{0,\dots,n\}$, on a bien

$$P\big((X=i),(Y=j)\big)=P(X=i)P(Y=j)=\frac{1}{(n+1)^2}.$$